



TITLE:

Dual pairにおけるCasimir作用素の 対応 (群と環の表現論及び非可換調 和解析)

AUTHOR(S):

伊藤, 稔

CITATION:

伊藤, 稔. Dual pairにおけるCasimir作用素の対応 (群と環の表現論及び非可換調和解析). 数理解析研究所講究録 2001, 1183: 94-101

ISSUE DATE:

2001-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/64594>

RIGHT:

Dual pair における Casimir 作用素の対応

京大 理 伊藤稔 (MINORU ITOH)*

Introduction. Dual pair の興味深い性質のひとつとして、ふたつの Lie 環の普遍包絡環の「中心」(正確には Lie 群の adjoint 作用に関する不変式環)の像が一致するということがある. 本稿では, [H2] で導入された complex reductive dual pair について, この普遍包絡環の対応を Casimir 作用素と呼ばれる中心元を用いて具体的に記述する.

以下, 複素数体 \mathbb{C} の上で考える. (G, G') を複素 symplectic 群 $Sp_N = Sp_N(\mathbb{C})$ における reductive dual pair とする. すなわち G, G' は互いが互いの commutant であるような Sp_N の reductive な部分群である. また ω を Sp_N の oscillator 表現とする. このとき $\omega(G)$ および $\omega(G')$ の $\omega(U(\mathfrak{sp}_N))$ における commutant はそれぞれ Lie 環 $\mathfrak{g}' = \text{Lie}(G')$, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ の作用から生成されることが知られている [H2]. 特に普遍包絡環の作用について次の等式が成立する:

$$\omega(U(\mathfrak{g})^G) = \omega(U(\mathfrak{g}')^{G'}).$$

ただし $U(\mathfrak{g})^G$ は G の adjoint 作用に関する普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の不変元全体のなす環を表す. 同様の等式は複素直交群 O_N における reductive dual pair とその pin 表現 σ に対しても成立する: $\sigma(U(\mathfrak{g})^G) = \sigma(U(\mathfrak{g}')^{G'})$. 本稿の目標はこのふたつの普遍包絡環の中心の対応を Lie 環の基底の言葉で記述することである. 主結果は“Casimir 作用素”と呼ばれる $U(\mathfrak{g})^G$, $U(\mathfrak{g}')^{G'}$ の生成系の簡潔な等式である.

Casimir 作用素は古典群の普遍包絡環において, 以下のように導入される. まず一般線型群 GL_N の場合から始める. Lie 環 \mathfrak{gl}_N の標準的な基底 E_{ij} を要素とする行列 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathfrak{gl}_N} = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ を考える. これを普遍包絡環の元を要素とする行列だと思って冪のトレース

$$\text{tr}(\mathbf{E}^r) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq N} E_{i_1 i_2} E_{i_2 i_3} \cdots E_{i_r i_1}$$

を考えると, これは GL_N の adjoint 作用で不変であることが知られている ([PP1], [Ge], [Z]). また $\{\text{tr}(\mathbf{E}^r) \mid 0 \leq r \leq N\}$ が不変式環 $U(\mathfrak{gl}_N)^{GL_N}$ の生成系をなしている. この $\text{tr}(\mathbf{E}^r)$ を GL_N に関する Casimir 作用素と呼ぶ.

*Partially supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists.

同様の中心元は $G = O_N, Sp_N$ の普遍包絡環に対しても導入できる. 群 G を定める双線型形式に対応した対称行列または交代行列を Φ で表すと, Lie 環 $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ は $F_{ij} = E_{ij} - \Phi^{-1}E_{ji}\Phi$ という形の元で張られる. 一般線型群 GL_N のときと同様にこれらを要素とする行列 $F = F_{\mathfrak{g}} = (F_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ を構成し, その冪のトレース $\text{tr}(F^r)$ をとる. するとこれはやはり G の adjoint 作用で不変であり, さらに $\{\text{tr}(F^{2r}) \mid 0 \leq 2r \leq N\}$ が不変式環 $U(\mathfrak{g})^G$ の生成系をなしている. この $\text{tr}(F^r)$ を G に関する Casimir 作用素と呼ぶ ([PP2], [Ge], [Z]).

Remarks. (1) 一般に reductive Lie 環の普遍包絡環の 2 次の中心元として Casimir element と呼ばれるものがよく知られているが, 上記の Casimir 作用素はこれの拡張と見なせる.

(2) 不変式環 $U(\mathfrak{g})^G$ は明らかに $U(\mathfrak{g})$ の中心 $ZU(\mathfrak{g})$ に含まれる. 実際には $G = GL_N, Sp_N, O_{2k+1}$ のときには $U(\mathfrak{g})^G$ は $ZU(\mathfrak{g})$ に一致しており, 上記の例では $G = O_{2k}$ のときのみ $U(\mathfrak{g})^G$ が $ZU(\mathfrak{g})$ の真部分集合になっている.

主定理を述べよう. 複素 symplectic 群における reductive dual pair は $(GL_m, GL_n), (O_m, Sp_n)$ という二系列の既約な dual pair の直積という形で書くことができる ([H1], [S]). この二系列の既約な dual pair (G, G') に対して oscillator 表現 ω における $U(\mathfrak{g})^G$ と $U(\mathfrak{g}')^{G'}$ の対応を記述したのが 本稿の主定理である:

Theorem A. Sp_{2mn} における dual pair (GL_m, GL_n) に対し次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \omega \left(\text{tr} \left(\left(E - \frac{n}{2} I_m \right) \left(E - \left(\frac{n}{2} + m \right) I_m \right)^r \right) \right) \\ = \omega \left(\text{tr} \left(\left(E' - \frac{m}{2} I_n \right) \left(E' - \left(\frac{m}{2} + n \right) I_n \right)^r \right) \right). \end{aligned}$$

ただし $E = E_{\mathfrak{gl}_m}, E' = E_{\mathfrak{gl}_n}$ とする.

Theorem B. Sp_{mn} における dual pair (O_m, Sp_n) に対し次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \omega \left(\text{tr} \left(\left(F - \frac{n}{2} I_m \right) \left(F - \left(\frac{n}{2} + m - \frac{1}{2} \right) I_m \right)^r \right) \right) \\ = \omega \left(\text{tr} \left(\left(F' - \frac{m}{2} I_n \right) \left(F' - \left(\frac{m}{2} + n + \frac{1}{2} \right) I_n \right)^r \right) \right). \end{aligned}$$

ただし $F = F_{\mathfrak{o}_m}, F' = F_{\mathfrak{sp}_n}$ とする.

Remark. Theorems A, B から G の Casimir 作用素の像は G' の Casimir 作用素の像の線型和で書けることがわかる. この事実は Klink, Leung, Ton-That によって示されたが, 彼らはその具体的な記述は与えなかった. Dual pair (GL_m, GL_n) の場合については [KT] を, (O_m, Sp_n) の場合については [LT], [L] を参照のこと.

複素直交群における reductive dual pair (G, G') とその pin 表現 σ に対しても $U(\mathfrak{g})^G$ と $U(\mathfrak{g}')^{G'}$ の対応を同様に記述することができる. 複素直交群における既約な reductive dual pair は (GL_m, GL_n) , (O_m, O_n) , (Sp_m, Sp_n) の三系列に分類される [S].

Theorem C. O_{2mn} における dual pair (GL_m, GL_n) に対し 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \sigma \left(\text{tr} \left(\left(E + \frac{n}{2} I_m \right) \left(E + \left(\frac{n}{2} - m \right) I_m \right)^r \right) \right) \\ = (-)^r \sigma \left(\text{tr} \left(\left(E' + \frac{m}{2} I_n \right) \left(E' + \left(\frac{m}{2} - n \right) I_n \right)^r \right) \right). \end{aligned}$$

ただし $E = E_{\mathfrak{gl}_m}$, $E' = E_{\mathfrak{gl}_n}$ とする.

Theorem D. O_{mn} における dual pair (O_m, O_n) に対し 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \sigma \left(\text{tr} \left(\left(F + \frac{n}{2} I_m \right) \left(F + \left(\frac{n}{2} - m + \frac{1}{2} \right) I_m \right)^r \right) \right) \\ = (-)^r \sigma \left(\text{tr} \left(\left(F' + \frac{m}{2} I_n \right) \left(F' + \left(\frac{m}{2} - n + \frac{1}{2} \right) I_n \right)^r \right) \right). \end{aligned}$$

ただし $F = F_{\mathfrak{o}_m}$, $F' = F_{\mathfrak{o}_n}$ とする.

Theorem E. O_{mn} における dual pair (Sp_m, Sp_n) に対し 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \sigma \left(\text{tr} \left(\left(F + \frac{n}{2} I_m \right) \left(F + \left(\frac{n}{2} - m - \frac{1}{2} \right) I_m \right)^r \right) \right) \\ = (-)^r \sigma \left(\text{tr} \left(\left(F' + \frac{m}{2} I_n \right) \left(F' + \left(\frac{m}{2} - n - \frac{1}{2} \right) I_n \right)^r \right) \right). \end{aligned}$$

ただし $F = F_{\mathfrak{sp}_m}$, $F' = F_{\mathfrak{sp}_n}$ とする.

次節以降で述べるように, これらの定理はほぼ一貫した計算で証明することができる.

上記の dual pair について oscillator 表現 または pin 表現の $G \times \mathfrak{g}'$ -加群としての既約分解は詳しく研究されている ([KV], [H3]). また Casimir 作用素の既約表現における固有値は [PP1], [PP2] で与えられているから, 上記の定理は 原理的にはこの既約分解に関する結果から導出可能な筈である. しかし その計算は必ずしも自明ではない. 本稿ではこうした結果によらない直接的な証明を与える. 本稿の計算から逆に既約分解の問題にアプローチするのも面白いかもしれない.

Capelli 型の関係式との関係にも触れておく. Capelli 恒等式は一般線型 Lie 環の普遍包絡環の中心の生成系である Capelli elements の作用に関する等式であり, Sp_{2mn} における dual pair (GL_m, GL_n) での普遍包絡環の中心の対応のひとつの記述になっている ([Ca1], [Ca2], [U1]). Capelli element と Casimir 作用素の関係は Newton の公式の類似で与えら

れる ([N], [I1], [U2]) から, Theorem A は Capelli 恒等式とこの Newton 型の関係式から導くこともできる. しかしこの証明方法は他の定理には容易には適用できない.

Sp_{mn} における dual pair (O_m, Sp_n) に対しても Capelli 恒等式の類似物が固有値の言葉で与えられている [MN]. これは Sp_{mn} の oscillator 表現の $O_m \times \mathfrak{sp}_n$ -加群としての既約分解に関する結果 ([KV]) からの帰結である. この結果と Sklyanin determinant に関する [M] の結果を組み合わせることで, Theorem B ほど簡潔ではないが, $U(\mathfrak{o}_m)^{O_m}$ と $U(\mathfrak{sp}_n)^{Sp_n}$ の対応の Lie 環の基底の言葉による記述が得られることも注意しておく.

1. The pair (GL_m, GL_n) in Sp_{2mn} . 本稿の定理はすべて一貫した方法で証明できる. まず今節で Theorem A の証明について, すなわち Sp_{2mn} における dual pair (GL_m, GL_n) の場合について詳しく述べ, 次節以降で残りの dual pair の場合の証明の方針を示す.

群 GL_m, GL_n は $m \times n$ 行列の空間 $\text{Mat}_{m,n}$ への左右からの積で $GL(\text{Mat}_{m,n})$ の部分群と見なすことで, dual pair をなす. さらにこの pair は次のようなより大きな symplectic 群の中の dual pair と見なすことができる. 行列の空間 $V = \text{Mat}_{m,n}$ とその双対空間 V^* の直和空間 $V \oplus V^*$ に次のように symplectic 形式を入れる:

$$\langle u + u^*, v + v^* \rangle = u^*(v) - v^*(u), \quad u, v \in V, \quad u^*, v^* \in V^*.$$

群 $GL(V)$ の元 g はこの空間 $V \oplus V^*$ に $g \cdot (u, u^*) = (gu, {}^t g^{-1} u^*)$ という形で等長的に作用するから, これによって $GL(V)$ を $Sp(V \oplus V^*)$ の部分群と見なす. ただし $(u, u^*) \in V \oplus V^*$ とする. $GL(V) = GL(\text{Mat}_{m,n})$ の部分群 GL_m, GL_n は $Sp(V \oplus V^*)$ の部分群としても dual pair になっている.

Theorem A はふたつの Lie 環 $\mathfrak{gl}_m, \mathfrak{gl}_n$ の作用を具体的に書き下して直接計算することで示すことができる. $Sp(V \oplus V^*)$ の oscillator 表現 ω は行列の空間 $\text{Mat}_{m,n}$ の上の急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\text{Mat}_{m,n})$ の上に構成される. E_{ij}, E'_{ij} をそれぞれ $\mathfrak{gl}_m, \mathfrak{gl}_n$ の標準的な基底, x_{ij} を $\text{Mat}_{m,n}$ の標準的な座標とすると, Lie 環 $\mathfrak{gl}_m, \mathfrak{gl}_n$ の作用は微分作用素環 $\mathcal{PD}(\text{Mat}_{m,n})$ の言葉で次のように書ける [H3]:

$$\omega(E_{ij}) = \sum_{s=1}^n x_{is} \frac{\partial}{\partial x_{js}} + \frac{n}{2} \delta_{ij}, \quad \omega(E'_{ij}) = \sum_{s=1}^m x_{si} \frac{\partial}{\partial x_{sj}} + \frac{m}{2} \delta_{ij}.$$

これを行列の形で簡潔にまとめよう. Lie 環の元を要素とする正方行列 $E = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ および $E' = (E'_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, そして微分作用素を要素とする $m \times n$ 行列 $X = (x_{ij})$ および $X^* = (\frac{\partial}{\partial x_{ij}})$ を導入すると, この表示は次のようにまとめられる:

$$\omega(E) = X^t X^* + \frac{n}{2} I_m, \quad \omega(E') = {}^t X X^* + \frac{m}{2} I_n.$$

特に Theorem A は次のように書き直される:

$$(1) \quad \text{tr}(X^t X^* (X^t X^* - mI_m)^r) = \text{tr}({}^t X X^* ({}^t X X^* - nI_n)^r).$$

以下 この関係式を正準交換関係を使って示す. この計算をスムーズに行うために次の三つの補題を利用する:

Lemma 1.1. 次の等式が成立する:

$${}^t X^* X - mI_n = {}^t ({}^t X X^*), \quad X^* {}^t X - nI_m = {}^t (X {}^t X^*).$$

Lemma 1.2. ふたつの行列 $X {}^t X^*$, ${}^t X X^*$ の要素は互いに可換である:

$$[(X {}^t X^*)_{ij}, ({}^t X X^*)_{kl}] = 0.$$

Lemma 1.3. 次の等式が成立する:

$$(X {}^t ({}^t X X^*))_{ij} = \sum_{s=1}^m x_{sj} (X {}^t X^*)_{is}.$$

これらの補題の証明はどれも易しい. Lemma 1.1 は交換関係 $[x_{ij}^*, x_{kl}] = \delta_{ik} \delta_{jl}$ からすぐわかる. Lemma 1.2 はふたつの Lie 環 \mathfrak{gl}_m , \mathfrak{gl}_n の作用が互いに可換であることからの直接の帰結である. Lemma 1.3 も X の要素が互いに可換であることから容易にわかる.

Lemma 1.1 より

$$\begin{aligned} X {}^t X^* (X {}^t X^* - mI_m)^r &= X ({}^t X^* X - mI_n)^r \cdot {}^t X^* = X {}^t ({}^t X X^*)^r \cdot {}^t X^*, \\ {}^t X X^* ({}^t X X^* - nI_n)^r &= {}^t X (X {}^t X^* - nI_m)^r X^* = {}^t X {}^t (X {}^t X^*)^r X^* \end{aligned}$$

であるから, Theorem A は (1) からさらに次のように書き換えられる:

$$(2) \quad \text{tr}(X {}^t ({}^t X X^*)^r \cdot {}^t X^*) = \text{tr}({}^t X {}^t (X {}^t X^*)^r X^*).$$

ただし ${}^t Z^r$ という記号は 行列 Z の転置の r 乗を表す. 等式 (2) を示すため 次の命題を用意する:

Proposition 1.4. 任意の $Z \in \text{Mat}_{m,n}(\mathcal{PD}(\text{Mat}_{m,n}))$ に対し, 次の等式が成立する:

$$\text{tr}(X {}^t ({}^t X X^*)^r \cdot {}^t Z) = \text{tr}(X {}^t ({}^t X X^*)^{r-1} \cdot {}^t ({}^t (X {}^t X^*) Z)).$$

Proof. 直接的な計算と Lemma 1.3 から主張の等式の左辺は次のように変形できる:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(X({}^tXX^*)^r \cdot {}^tZ) &= \mathrm{tr}(X({}^tXX^*)({}^tXX^*)^{r-1} \cdot {}^tZ) \\ &= \sum_{i,j,k} (X({}^tXX^*))_{ij} ({}^tXX^*)^{r-1}_{jk} ({}^tZ)_{ki} \\ &= \sum_{i,j,k,s} x_{sj} (X^tX^*)_{is} ({}^tXX^*)^{r-1}_{jk} ({}^tZ)_{ki}.\end{aligned}$$

ここで $(X^tX^*)_{is}$ と $({}^tXX^*)^{r-1}_{jk}$ は可換である (Lemma 1.2) から, これは次式に等しい:

$$\sum_{i,j,k,s} x_{sj} ({}^tXX^*)^{r-1}_{jk} (X^tX^*)_{is} ({}^tZ)_{ki}.$$

注意深く見ると これは Proposition 1.4 の右辺に等しい. \square

行列 Z は任意であったから, Proposition 1.4 の式変形は繰り返し行うことができる. 特に次の等式が成り立つ:

Corollary 1.5. 任意の行列 $Z \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathcal{PD}(\mathrm{Mat}_{m,n}))$ に対し, 次の等式が成立する:

$$\mathrm{tr}(X({}^tXX^*)^r \cdot {}^tZ) = \mathrm{tr}(X \cdot {}^t({}^tXX^*)^r Z) = \mathrm{tr}({}^tX({}^tXX^*)^r Z).$$

これで Theorem A はほぼ証明された. 実際 目標の等式 (2) は Corollary 1.5 において Z を X^* で置き換えることで得られる.

2. The pair (O_m, Sp_n) in Sp_{mn} . Dual pair (O_m, Sp_n) に関する Theorem B も前節とほぼ同様の計算で証明できる. 概略を記す.

Lie 群 O_m, Sp_n は大きな symplectic 群 Sp_{mn} の部分群と自然に見なすことで, dual pair をなしている. Sp_{mn} の oscillator 表現は急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\mathrm{Mat}_{m,n'})$ の上に構成される. ただし $n = 2n'$ とする. まず oscillator 表現における Lie 環 $\mathfrak{o}_m, \mathfrak{sp}_n$ の作用を書き下そう. x_{ij} を行列の空間 $\mathrm{Mat}_{m,n'}$ の座標として, 一次の微分作用素の組 $\{p_{ij}, p_{ij}^*\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n'}$ を次のように定める:

$$p_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & 0 \leq j \leq n', \\ \partial_{i,j-n'}, & n' + 1 \leq j \leq 2n', \end{cases} \quad p_{ij}^* = \begin{cases} \partial_{ij}, & 0 \leq j \leq n', \\ -x_{i,j-n'}, & n' + 1 \leq j \leq 2n'. \end{cases}$$

ただし $\partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ とする. このとき Lie 環 $\mathfrak{o}_m, \mathfrak{sp}_n$ の作用はこれらの微分作用素を要素とする行列 $P = (p_{ij})$, $P^* = (p_{ij}^*)$ を用いて次のように表される [H3]:

$$\omega(F) = P^t P^* + \frac{n}{2} I_m, \quad \omega(F') = {}^t P P^* + \frac{m}{2} I_n.$$

ここで F, F' は Introduction で定義したそれぞれ $\mathfrak{o}_m, \mathfrak{sp}_n$ の生成元を要素とする行列である. したがって Theorem B を証明するためには次を示せばよい:

$$\mathrm{tr}(P^t P^* (P^t P^* - (m - \frac{1}{2}) I_m)^r) = \mathrm{tr}({}^t P P^* ({}^t P P^* - (n + \frac{1}{2}) I_n)^r).$$

この等式は, 次の三つの補題を使って 前節と同じ手続きで示すことができる:

Lemma 2.1. 次の等式が成立する:

$${}^tP^*P - mI_n = {}^t(P^*P), \quad P^*{}^tP - nI_m = {}^t(P^*P).$$

Lemma 2.2. ふたつの行列 P^*P , ${}^tPP^*$ の要素は互いに可換である:

$$[(P^*P)_{ij}, ({}^tPP^*)_{kl}] = 0.$$

Lemma 2.3. 次の等式が成立する:

$$(P^*({}^tPP^* + \frac{1}{2}I_n))_{ij} = \sum_{s=1}^m p_{sj} (P^*P - \frac{1}{2}I_m)_{is}.$$

この三つの補題は 前節の補題とほぼ同じに 容易に証明できる. Lemma 2.3 だけが前節の Lemma 1.3 より少し複雑であるが, これは行列 P の要素が互いに非可換なことによる.

3. The pairs in the orthogonal groups. 直交群における dual pair に関する Theorems C, D, E の証明もほぼ同様である. ただし計算の舞台は通常微分作用素環ではなく, “外積代数に関する微分作用素環” である Clifford 代数での計算を行うことになる. 前節までの計算に比べると新たに符号の処理が加わるだけで, 本質的には同じ手続きで証明できる. 詳細は[I2] を参照のこと.

REFERENCES

- [Ca1] Capelli, A., *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Ann. **29** (1887), 331–338.
- [Ca2] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.
- [Ge] Gelfand, I.M., *Center of the infinitesimal groups*, Mat. Sbornik. n. Ser. **26** (68) (1950), 103–112; English transl. in “Collected Papers” Vol. II, pp.22–30.
- [H1] Howe, R., *θ -series and invariant theory*, in “Automorphic Forms, Representations, and L -Functions” Part I, Proc. Symp. Pure Math., vol.33, Am. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 275–285.
- [H2] ———, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Am. Math. Soc. **313** (1989), 539–570; *Erratum*, Trans. Am. Math. Soc. **318** (1990), 823.
- [H3] ———, *Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond*, in “the Schur Lectures (1992)”, Isr. Math. Conf. Proc. **8** (1995).
- [HU] Howe, R., Umeda, T., *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.

- [I1] Itoh, M., *Explicit Newton's formulas for \mathfrak{gl}_n* , J. Algebra **208** (1998), 687–697.
- [I2] ———, *Correspondence of the Casimir operators in the reductive dual pairs*, preprint (2000).
- [KV] Kashiwara, M., Vergne, M., *On the Segal-Shale-Weil representation and harmonic polynomial*, Invent. Math. **44** (1978), 1–47.
- [KT] Klink, W.H., Ton-That, T., *On resolving the multiplicity of arbitrary tensor products of the $U(N)$ groups*, J. Phys. A **21** (1988), 3877–3892.
- [L] Leung, E.Y., *On resolving the multiplicity of tensor products of irreducible representations of symplectic groups*, J. Phys. A **26** (1993), 5851–5866.
- [LT] Leung, E.Y., Ton-That, T., *Invariant theory of the dual pairs $(SO^*(2n), Sp(2k, \mathbb{C}))$ and $(Sp(2n, \mathbb{R}), O(N))$* , Proc. Am. Math. Soc. **120** (1994), 53–65.
- [M] Molev, A., *Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras*, J. Math. Phys. **36** (1995), 923–943.
- [MN] Molev, A., Nazarov, M., *Capelli identities for classical Lie algebras*, Math. Ann. **313** (1999), 315–357.
- [N] Nazarov, M., *Quantum Berezinian and the classical Capelli identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 123–131.
- [PP1] Perelomov, A.M., Popov, V.S., *Casimir operators for $U(n)$ and $SU(n)$* , Soviet J. Nuclear Phys. **3** (1966), 676–680.
- [PP2] ———, *Casimir operators for the orthogonal and symplectic groups*, Soviet J. Nuclear Phys. **3** (1966), 819–824.
- [S] Schmidt, M., *Classification and partial ordering of reductive Howe dual pairs of classical Lie groups*, J. Geom. Phys. **29** (1999), 283–318.
- [U1] Umeda, T., *The Capelli identities, a century after*, Sugaku **46** (1994), 206–227; (in Japanese); English transl. in “Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants”, AMS Translations, Series 2, vol. 183 (1998), pp. 51–78, ed. by K. Nomizu
- [U2] ———, *Newton's formula for \mathfrak{gl}_n* , Proc. Am. Math. Soc. **126** (1998), 3169–3175.
- [Z] Želobenko, D.P., *Compact Lie Groups and their Representations*, Translations of Mathematical Monographs **40**, American Mathematical Society, 1973.